Vorlesungsreihe
Simulation betrieblicher Systeme

Einsatz von Zufallszahlen bei der Monte-Carlo-Simulation

HTW DRESDEN (FH)
FB Informatik/Mathematik

Prof. Dr.-Ing. Thomas Wiedemann
email: wiedem@informatik.htw-dresden.de

Übersicht zur Modellierung zufälliger Prozesse

- **Anwendung von Zufallszahlen bei der Monte-Carlo-Simulation**
  - **Grundprinzipien**
  - **Beispiele**
  - **Spezialverfahren**

- **Anwendung der Methodik bei der Untersuchung komplexer (ökonomischer) Systeme**

Die Monte-Carlo-Simulation

Grundprinzip

- System mit N zufälligen Größen liegt vor
- die Eigenschaften und Reaktionen des Systems hängen nur von den aktuellen Größen ab (kein Gedächtnis, keine Trägheit)
- Beschreibung des Modells durch analytische, algorithmische oder empirische Methoden (auch gemischt)
- ein Vektor von Zufallszahlen entsprechend der Verteilungsfunktion jeder Größe wird generiert
- die Reaktion des Systems wird für eine große Anzahl von Zufallsvektoren statistisch bestimmt

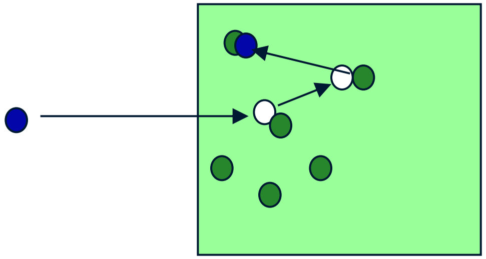
Vektor von Zufallszahlen

Systemreaktion

Entstehung der Monte-Carlo-Simulation

- während des 2. Weltkrieges in den Forschungslaboren von Los Alamos (USA)
- mutmaßliche Begründer S. Ulam und J. von Neumann (erste Idee von Fermi)
- Kernspaltungsprozesse sind stochastischer Natur und unterliegen einer Vielzahl nichtlinearer Zusammenhänge (z.B. Temperaturabhängigkeit der Trefferquote von Neutronen)
- analytische Berechnung war nicht möglich
- Experimente waren zu gefährlich (Verhalten hart an der Grenze zur Kettenreaktion)
- Lösung durch analytisch/empirische Beschreibung der Flugbahn eines Neutrons und dessen Weg in einem Material
- Durchführung der Berechnung in großer Anzahl auf ersten Rechnern

- Die Flugbahn eines Teilchen konnte durch Annahme von Flugbahn, Geschwindigkeit und Auftreffwinkel (-> Abprall oder Absorption) in Abhängigkeit von den Materialkonstanten relativ genau nachgebildet werden
- Heutige, wesentlich verfeinerte Methoden machen die Durchführung von realen Atomwaffentests unnötig (Pressemitlg.: echte Tests zur **VALIDIERUNG** der Modelle)



Anwendungen der Monte-Carlo-Verfahren

- das Monte-Carlo-Verfahren ist noch keine echte Simulation
- es fehlt eine explizite Modellierung dynamischer Prozesse
- Schwerpunkt ist die Analyse von Wechselwirkungen zufälliger Größen

Anwendungsbereiche:

in der Mathematik :

- näherungsweise Berechnung nicht lösbarer Integrale
- Numerische Bestimmung von Naturkonstanten (PI)
- Einsatz als oder in Optimierungsverfahren

in der Technik

- Ausfallverhalten, Eintreten seltener Zustände und deren Auswirkungen
- Langandauernde Entwicklung (Materialalterung in Kernreaktor über 40 Jahre)

Betriebswirtschaft:

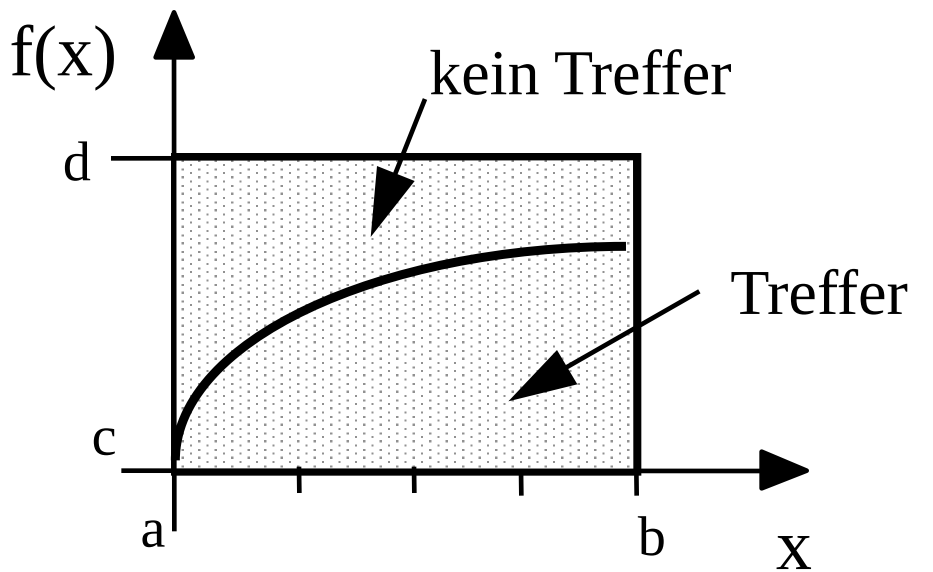
- Risikoanalyse zur Abschätzung der Folgen von Entscheidungen bei zufälligen Randbedingungen (Börsenkurse)
- Cross-Impact-Analyse zur Berechnung sich gegenseitig bedingender Entscheidungsabläufe, z.B. bei der Abschätzung des Konkurrenzverhaltens

Monte-Carlo-Verfahren zur Berechnung von Integralen

- Integrale sind nicht immer analytisch lösbar (zu starke Verknüpfung der Werte, implizite Darstellungen)
- Eine Näherung des Flächeninhalts kann mit der Monte-Carlo-Methode berechnet werden.
- Zur Lösung wird die gesuchte Fläche innerhalb einer einfach zu berechnenden Fläche (z.b. Quadrat oder Rechteck) eingeschlossen und für x und y werden entsprechend verteilte Zufallszahlen generiert (x im Intervall [a,b] und y aus [c,d]).
- Nach dem Einsetzen von x_i in f(x) ergibt sich eine Realisierung $f(x_i)$ und es wird getestet auf

$$\mathbf{y_i \leq f(x_i)}$$

- Falls die Ungleichung zutrifft, wird das Paar x_i , $\mathbf{y_i}$ als Treffer gewertet.



Monte-Carlo-Verfahren zur Berechnung von Integralen II

- Nach dem Theorem von Bernoulli, einer Variante des Gesetzes der großen Zahlen, konvergiert das Verhältnis

$$\frac{\text{Anzahl der Treffer}}{\text{Anzahl der Versuche}} * \text{Fläche}$$

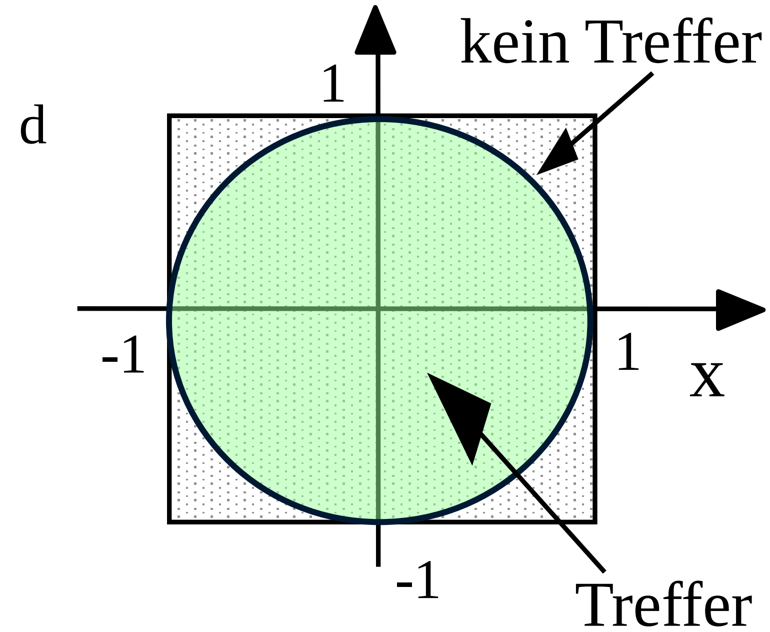
  für eine größere Anzahl von Versuchen gegen den gesuchten Flächeninhalt.

- Bei a=0, b=4, c=0 und d=1 ergibt sich eine Fläche von 4 Flächeneinheiten. Seien von 1000 Versuchen 562 als Treffer gezählt, so ergibt sich für den gesuchten Flächeninhalt A = 522 / 1000 * (4 * 1) = 2,88 .
- Zur Abschätzung der Genauigkeit des Verfahrens führt man M mal n-Versuche durch und ermittelt von den M-Einzelergebnissen das arithmetische Mittel und die Standardabweichung.
- Zur Absicherung einer genügend großen Anzahl von Versuchen testet man für m<40 man mit dem γ-Fraktil der t-Verteilung mit M-1 -Freiheitsgraden, bei größerem M mit dem γ-Fraktil τ der Normalverteilung.

Numerische Bestimmung von Naturkonstanten

- Da die Flächenberechnung rein numerisch abläuft, können bei bekannten analytischen Formeln für die Fläche auch Konstanten wie PI berechnet werden.

Beispiel:



- Kreis wird bestimmt durch Kreisgleichung

$$\mathbf{x^2 + y^2 = r}$$

- Alle Wertekombinationen x_i, y_i mit

$$\mathbf{x_i^2 + y_i^2 \leq r}$$

liegen auf oder innerhalb des Kreisbogens.

- Mit einer Monte-Carlo-Simulation kann eine Näherung für die Fläche berechnet werden.

$$A_{MC} = \frac{\text{Treffer bei } (\mathbf{x_i^2 + y_i^2 \leq r})}{\text{Anzahl der Versuche}} * \text{Fläche des Rechtecks}$$

- Nach Gleichsetzung mit der analytischen Formel $A = \pi r^2$ kann z.B. für r=1

$$\boldsymbol{\pi = A_{MC} / r^2 = \textbf{Treffer bei } (x_i^2 + y_i^2 \leq r) \textbf{ /Versuche} * 4}$$

näherungsweise bestimmt werden.

Typische Programmierung der Monte Carlo-Methode

// Montage von 3 Rohren a 2 m +/- X mm - Eingaben / Init (unter .NET C#)

```
double tolvorgabe =   Double.Parse(this.tol.Text )/1000;  // Werte aus Aufgabe
double abweichung = Double.Parse(this.abw.Text)/1000; // = Modell !
Random rnd;   rnd = new Random(); // lege Zufallszahlengenerator an
 long experiments = 1000000;   // Anzahl Experimente ( 10…100 wäre zu wenig !!)
 long hit = 0; double l1, l2, l3, summe ; // Laufvariablen

for (int i = 1; i < experiments; i++)   // Hauptschleife
        {  l1 = 2 - (tolvorgabe) + (2 * tolvorgabe) * rnd.NextDouble();
           l2 = 2 - (tolvorgabe) + (2 * tolvorgabe) * rnd.NextDouble();
           l3 = 2 - (tolvorgabe) + (2 * tolvorgabe) * rnd.NextDouble();
           summe = l1 + l2 + l3;   // Modell des Vorgange (hier Montage)
           if (Math.Abs(summe - 6) > abweichung)   // Test auf HIT-Bedingung
              hit++;  // Hochzählen des HIT-Zählers
        } // Ende Berechnungsschleife
// Endberechnung und Ausgabe
        this.wkt.Text = "" + (double) hit / experiments; // Ausgabe in GUI
```

Zufallszahlen-berechnung (immer zuerst)

Crude Monte Carlo

- Die Crude Monte Carlo -Methode ist eine Erweiterung der **Hit or Miss“-Monte** Carlo Methode zur Lösung von Problemen mittels Zufallszahlen.
- Während man bei Hit und Miss mit Wertepaaren die Einhaltung einer Bedingung prüft geht bei Crude-Monte-Carlo von einem erweiterten Ansatz aus:
- Gesucht wird wieder das bestimmte Integral der Funktion f(x).
- Führt man eine Faktorisierung des Integrals in Form von

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,f_x(x)\,dx$$

so läßt sich die rechte Seite der Gleichung interpretieren als Erwartungswert E[g(X)], wenn X aus einer Verteilung mit der Dichte $f_x(x)$ - hier U(0,1) -stammt.

- Genau diese Interpretation macht sich die Crude-Monte-Carlo-Methode zunutze, indem sie den Erwartungswert mit

$$E[g(X)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

schätzt.

- Vereinfacht ausgedrückt, ermittelt die Crude-Monte-Carlo-Methode die gesuchte Lösung durch Einsetzen von Zufallszahlen mit einer Gleichverteilung in den Intervallgrenzen entsprechend der oberen und unteren Grenze des bestimmten Intervalles.

Effizienzvergleich von Monte Carlo-Methoden

- Ein erster Vergleich der beiden aufgeführten Methoden zeigt, daß die Crude-Monte-Carlo-Methode nur mit einer Zufallszahl pro Versuch arbeitet. Eine rechentechnische Umsetzung wird dadurch in der Regel etwas günstiger sein.

- Statistische Untersuchungen zeigen, daß die Crude-Monte-Carlo-Methode bei gleicher Versuchsanzahl im Vergleich zu Hit und Miss bei 34% der Varianz liegt. Die Ergebnisse sind damit statistisch genauer.

- Allerdings setzt Crude-Monte-Carlo die Lösbarkeit von g(x) voraus. Oft ist dies jedoch nicht gegeben, so daß wieder Hit und Miss zur Anwendung kommen muß.

- In der Literatur finden sich eine ganze Reihe weiterer Ansätze zu Monte-Verfahren, welche mit noch besserer Effizienz und statistischer Güte arbeiten (siehe [HAMM65]).

Monte-Carlo-Simulation technischer Systeme

- Anwendung der Monte-Carlo-Methode in der Technik
  - Bestimmung von zufälligen Einflussgrößen (z.B. Störungen, Ausfälle, Angriffe)
  - algorithmische Nachbildung der Funktionen
  - die einzelnen Prozesse / Ereignisse müssen unabhängig sein !

Eingangsgrößen
Z_1 (Pegel)
Z_2 (Störung1)
Z_3 (Störung2)
...

Modell des Techniksystems,
z.B. Empfangsanlage

Signalparameter
Y_1 - Qualität
Y_2 – Einfachfehler
Y_3 – Mehrfachfehler
...
Systemreaktion

Anwendungsgebiete

- Kommunikationstechnik: störungsbehaftete Übertragungswege
- Logistik : Einfluss von Fahrereigenschaften, Wetter, Staus
- Qualitätsmanagement : Einfluss unterschiedlicher Lieferanten

Quantitative Risikoanalyse

- Anwendung der Monte-Carlo-Methode in der Betriebswirtschaft
  - Berechnung von betriebwirtschaftlichen Größen in Abhängigkeit von zufälligen Einflußgrößen
  - Zwischen den Größen gibt es jeweils noch einfach zu bestimmende analytische oder empirische Zusammenhänge
  - es handelt sich um Experimente, die durch Stichprobenziehungen dominiert sind
  - die zeitliche Ordnung kann eine Rolle im Rahmen der Ausgangsdaten spielen, eine echte dynamische Modellierung findet jedoch nicht statt

Anwendungsgebiete

- Allgemein: Cashflowanalyse bei unbekanntem Marktverhalten
- Banken (allgemeine Finanzwirtschaft)
  - Bestimmung von Kreditrisiken, Kursrisiko durch Zinsschwankungen
- Versicherungen : Bestimmung des Versicherungsrisikos bei Naturkatastrophen und Unglücken

Ablauf der quantitativen Risikoanalyse

- Bestimmung der Eingangsgrößen
- Ermittlung der Verteilungsfunktionen
- Untersuchung der Eingangsgrößen auf Abhängigkeit
  - Bei Abhängigkeit müssen diese ausgehend von einer gemeinsamen Zufallsfunktion generiert werden (korrelierte Werte)
- Definition der Funktionen zur Berechnung des Systemverhaltens und Bestimmung der resultierenden betriebswirtschaftlichen Größen (z.B. Umsatz, Selbstkosten, Gewinn)
- Experimentdurchführung mit ausreichend großer Anzahl von Einzelversuchen (einige Hundert bis Zehntausend Stichproben)
- Berechnung der statistischen Schätzungen für die Größen
- Auswertung durch grafische Visualisierung, Extremwertanalyse

Beispiel zur quantitativen Risikoanalyse

Gesucht ist die Verteilung für die tägliche Absatzmenge einer Eisdiele und darauf aufsetzend die Bestimmung der betriebswirtschaftlichen Parameter der Eisdiele.

Die Absatzmenge hängt ab von :

- der Anzahl der Kunden pro Tag
- Größe der Portion des einzelnen Kunden

<u>Modellierung der Eingangsgrößen</u>

- Die Anzahl der Kunden muß als Zufallsgröße abgebildet werden und hängt von der Einwohnerzahl B im Einzugsgebiet und dem Wetter ab. Man kann im Rahmen eines Eisverkaufs das Wetter mit Hilfe der Temperatur T beschreiben. Als Gleichung für die geschätzte Kundenzahl wird definiert : $K = f(T,B) + z$
- Die Funktion wird f durch eine Regressionsanalyse bestimmt auf der Basis empirischer Werte (eventuell auch bekannt durch frühere Analysen)
- z ist eine normalverteilte Zufallsvariable zur Nachbildung der Streuung.
- Die Temperaturverteilung wird meteorologischen Beobachtungen entnommen, idealerweise mit Min/Max-Werten pro Monat oder Zeitintervall.
- Die Bevölkerungszahl kann saisonal schwanken (Ferienzeit)
  - Bsp.: if T < 10 ➔ customers = Potential_customers * 0.3 * (0.8+0.4*rnd())
  - if T > 30 ➔ customers = Potential_customers * 1.3 (130 % an heissen Tagen)

Beispiel zur quantitativen Risikoanalyse II

Modellierung der Eingangsgröße Portionsgröße

- Die Größe der Portion wird in Eiskugeln gemessen.
- Die Portionsgröße ist unabhängig von der Kundenzahl, d.h die Anzahl der Kunden beeinflusst nicht deren Kaufgewohnheit.
- Möglich ist aber eine Abhängigkeit von der Temperatur !
- Je stärker die Portionsgröße zunimmt desto geringer wird die Wahrscheinlichkeit, dass sie gekauft wird. Deshalb wird hier eine Dichte eingesetzt die der geometrischen Verteilung sehr ähnlich ist.

if T<15 : P(X=1) = 0,8; P(X=2) = 0,15; P(X=3) = 0,03; …
if T<30 & >15 : P(X=1) = 0,5; P(X=2) = 0,25; P(X=3) = 0,125; …
if T>30 : P(X=1) = 0,2; P(X=2) = 0,50; P(X=3) = 0,2; …

Die betriebswirtschaftlichen Größen seien wie folgt definiert:

- Pro Kugel zum Preis von p fallen s Geldeinheiten (GE) Selbstkosten an.
- Zusätzlich treten pro Tag g GE Gemeinkosten auf (Miete, Löhne).

Berechnungsalgorithmus zum Beispiel Risikoanalyse

Die Durchführung der Risikoanalyse kann mit einem Algorithmus wie nachfolgend durchgeführt werden:

1. Ermittle für ein Zeitintervall eine in den Grenzen übliche Temperatur.
2. Bestimme eine zufällige Kundenzahl K auf Basis der Temperatur.
3. Generiere für jeden Kunden i (1...K) eine zufällige Portionsgröße e der Eiskugeln und addiere diese auf
4. Bestimme auf Basis der verkauften Eiskugeln die betriebswirtschaftlichen Daten (Umsatz = e * p, Gewinn = e*p – e*s - g)
5. Führe die Schritte 1.-4. für alle Intervalle mehrfach aus und berechne die mittlere Gewinnsituation für unterschiedliche Wetterverhältnisse (bzw. T)

Auswertung :

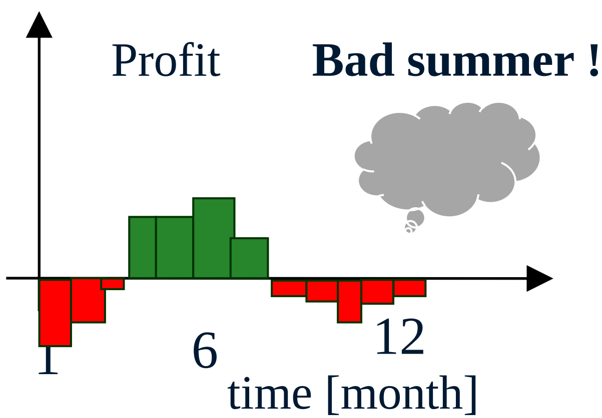
6. Stelle die Gewinn/Verlustwerte als Häufigkeitsverteilung in einem Histogramm dar (sinnvoll auch Gewinn/Verlust als f(T)

Weiterführende Auswertungen bei der Risikoanalyse

- Auf der Basis der ermittelten Kenndaten lassen sich entsprechende Schlußfolgerungen ziehen:
  - Ist das Geschäft überhaupt rentabel ?
  - Wie empfindlich sind die Ergebnisse auf Wettereinflüsse (andere Werte für f(K,T)) ?

Durch Analyse der negativen Werte und der Extremwerte lassen sich weitere Schlußfolgerungen ableiten:

- Schliessung des Geschäftes in nachfrageschwachen Zeiten
- Reduzierung der Gemeinkosten bei reduziertem Verkauf

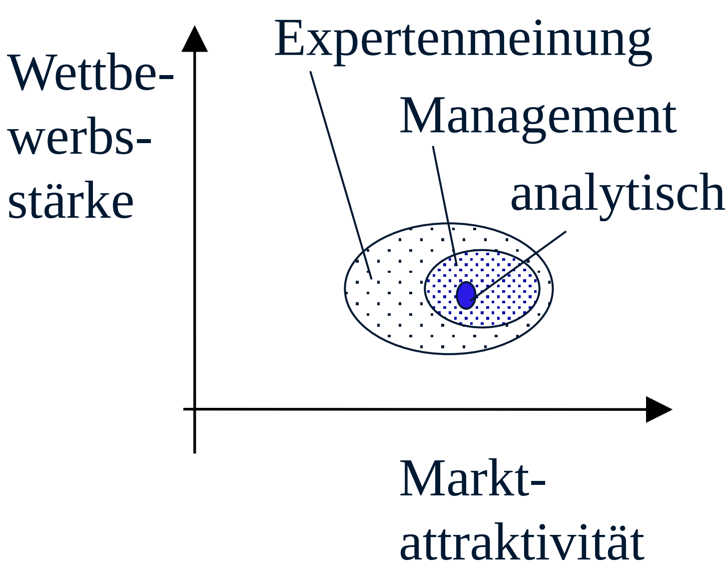


Weitere Anwendungsfälle der Risikoanalyse

Portfolioanalyse zur Bewertung strategischer Geschäftseinheiten

- Methode aus den 70er Jahren zur ganzheitlichen Analyse aller Geschäftsfelder eines Unternehmens (entwickelt von Boston Consulting, McKinsey)
- Aufgrund der Komplexität sind Bewertungen von Geschäftsfeldern mit sehr hohen Unsicherheiten und subjektiven Faktoren belastet
- statt genauer Werteangaben sind Bereichschätzungen (z.B. Mittel-Starke Marktposition) durch eine Menge von internen und externen Experten sinnvoll
- Die **Zusammenfassung der Expertenmeinungen kann dann durch eine quantitative Risikoanalyse** erfolgen.

- Die Zusammenfassung der Expertenmeinungen zu einer großen Anzahl von Faktoren wird bei der quantitativen Risikoanalyse durch zufällige Schwankungen überlagert
- Darstellung der Ergebnisse in einem Diagramm von Marktattraktivität / Wettbewerbstärke
- Auswertung der Abweichungen durch Gegen-überstellung (Signale strategischer Änderungen ?)



Weitere Anwendungsfälle der Risikoanalyse

Bewertung des Konkurrenzverhaltens

Bei der Investitionsplanung in gesättigten Märkten spielt die Reaktion der Konkurrenz auf die Investition eine große Rolle !

In der Regel existieren mehrere Szenarien:

- Man baut selbst, Konkurrenz wird abgeschreckt -> Vorteil durch größeren Marktanteil bei leichtem Preisverfall
- Man baut selbst, Konkurrenz baut auch -> Überkapazitäten und starker Preisverfall
- Man baut nicht, Konkurrenz baut -> Nachteil durch geringeren Marktanteil und leichtem Preisverfall
- Niemand baut – keine Änderung der Situation

- Das unbekannte Verhalten der Konkurrenz läßt sich durch eine Berechnung der Kosten und Erträge in den obigen Fällen abschätzen, z.B.
  - wenn man selbst baut; baut die Konkurrenz auch mit 25% Wahrscheinlichkeit
  - Durch eine Integration dieser wahrscheinlichen Verhaltensweisen kann für das eigene Unternehmen die summarische Erfolgsaussicht der obigen Optionen durch eine quantitative Risikoanalyse berechnet werden

Die Cross-Impact-Analyse

Entstehung und Grundprinzip

- Bei frühen Zukunftsforschungen ("Club of Rome") Anfang der 70iger Jahre wurden dynamische Abhängigkeiten zwischen Einzelfaktoren häufig zu wenig berücksichtigt (Reaktionen auf Ölkrise -> sparsamere Technologien)
- auch das Eintreten völlig neuer Faktoren wurde unterschätzt (z.B. Einfluß der Medizin, technischer Fortschritt, EDV -> Rationalisierung, neues Wachstum !).

Die <u>Cross-Impact-Analyse</u> erweitert die meist auf ein Gebiet fokussierte Risikoanalyse um eine gesamtheitliche Betrachtung :

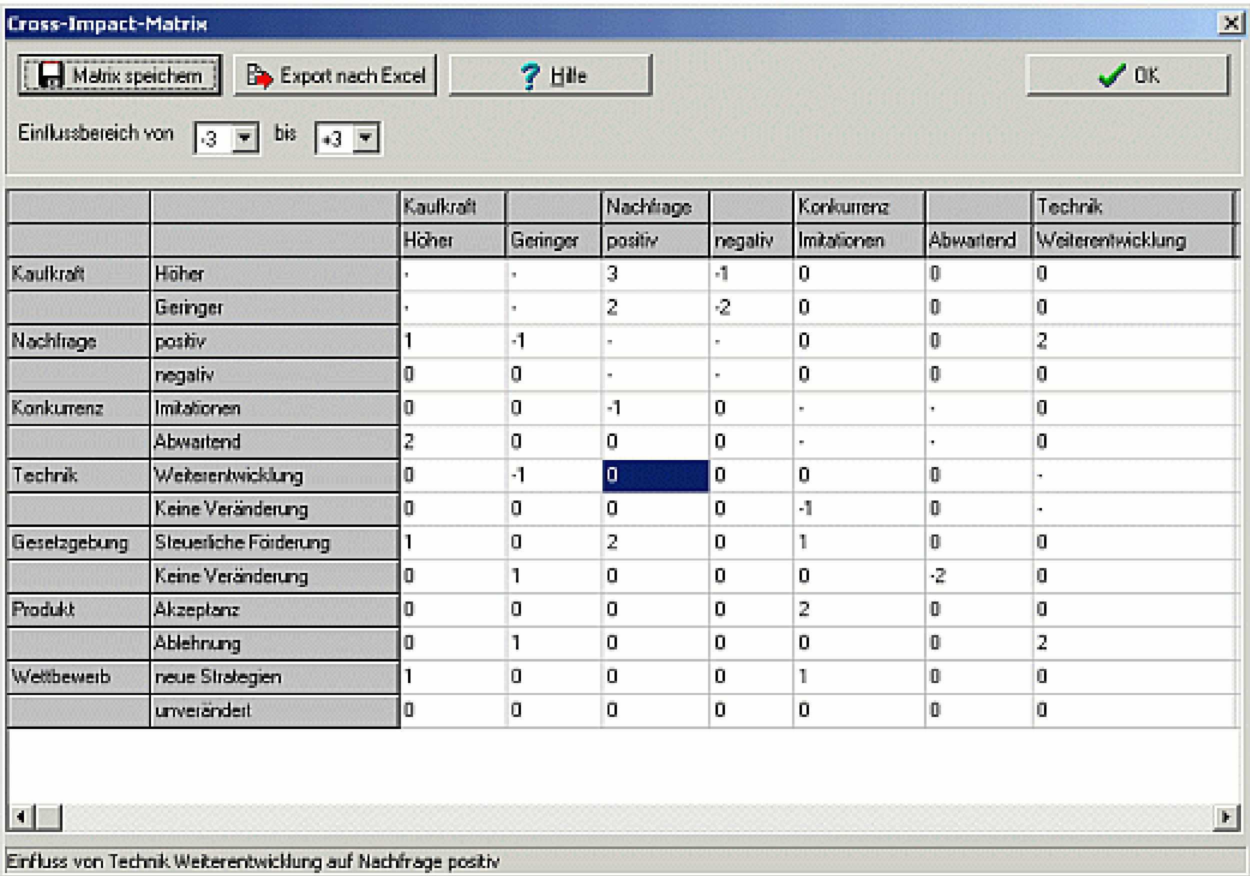
- Untersuchung der kausalen Zusammenhänge zwischen sozialen, technologischen und wirtschaftlichen Faktoren
- Erkennen von Rückkopplungen und deren Quantifizierung
- Schwerpunkt der Modellierung : bedingte Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen, welche sich in Abhängigkeit vom Eintreten anderer Ereignisse ändern

- Konkrete Methoden der Cross-Impact-Analyse reichen von einer einfachen detailerhöhung der quantitativen Risikoanalyse bis hin zu echt simulativen Methoden

Modellerstellung bei der Cross-Impact-Analyse

Zentrales Element ist die Cross-Impact-Matrix

- Stellt die Art und Stärke der Relation zwischen Einflußgrößen dar
- wird ergänzt durch Basiswahrscheinlichkeiten



		Kaufkraft		Nachfrage		Konkurrenz		Technik
		Höher	Geringer	positiv	negativ	Imitationen	Abwartend	Weiterentwicklung
Kaufkraft	Höher	-	-	3	-1	0	0	0
	Geringer	-	-	2	-2	0	0	0
Nachfrage	positiv	1	-1	-	-	0	0	2
	negativ	0	0	-	-	0	0	0
Konkurrenz	Imitationen	0	0	-1	0	-	-	0
	Abwartend	2	0	0	0	-	-	0
Technik	Weiterentwicklung	0	-1	0	0	0	0	-
	Keine Veränderung	0	0	0	0	-1	0	-
Gesetzgebung	Steuerliche Förderung	1	0	2	0	1	0	0
	Keine Veränderung	0	1	0	0	0	-2	0
Produkt	Akzeptanz	0	0	0	0	2	0	0
	Ablehnung	0	1	0	0	0	0	2
Wettbewerb	neue Strategien	1	0	0	0	1	0	0
	unverändert	0	0	0	0	0	0	0

Bedeutung der Bewertung

+ 3 Wichtiger Erfolgsfaktor
+ 2 Wesentlicher Erfolgsfaktor
+1 Geringer positiver Einfluss

0 **Keine Auswirkung**

-2 Geringer negativer Einfluss
-4 Bemerkbar negativer Einfluss
-6 Wesentliches Erfolgshindernis

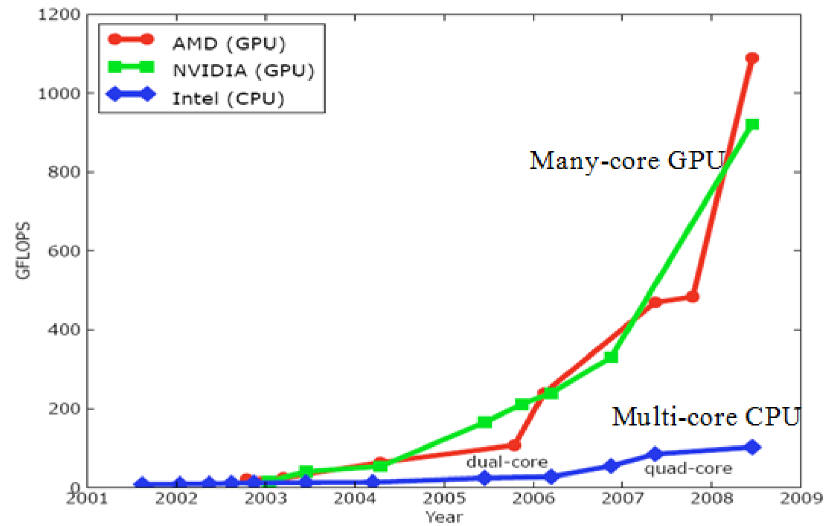
Zur besseren Differenzierung werden die Bewertungen je einmal für positive und negative Ausprägungen der jeweiligen Größe vergeben.

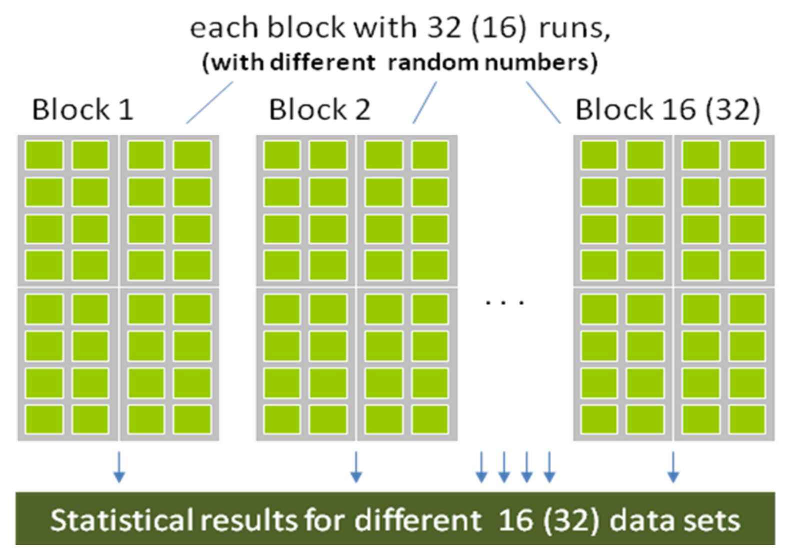
- Als Ergebnis der Analyse werden Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der einzelnen Ausprägungen in Szenarien berechnet.

Anwendungseigenschaften auf moderner Hardware

- Die Unabhängigkeit der einzelnen MC-Berechnungen voneinander lässt eine sehr gute Parallelisierbarkeit der MC-Methode zu:

- Übliche MC-Berechnungen können auf Multicore- oder Grafikkarten mit bis zu 1600 Kernen verteilt werden. Die Ergebnisse werden von den Recheneinheiten statistisch zusammengefasst (damit quasi komprimiert) und nur in größeren Abständen an die zentrale Einheit gemeldet.
- Bei Optimierungsläufen kann in Anlehnung an die MC-Methode eine MC-Optimierung erfolgen, in dem einzelne Punkte zufällig gewählt und per Simulation deren Zielwert berechnet wird.





Zusammenfassung zur Monte-Carlo-Simulation

Allgemein

- sehr einfaches und effizientes Analyseprinzip
- trotzdem auch Systeme mit hoher Komplexität (z.B. 20 dimensionale Körper oder Systeme mit 100 verschiedenen Einflussfaktoren) gut untersuchbar
- Modellierung relativ einfach durch Programmierung des einfachen Systemverhaltens als Funktion von zufälligen Einflussgrößen
  - auch Excel oder andere IT-Systeme zur Modellierung des Systems nutzbar

Grenzen:

- Keine Abhängigkeiten zwischen Versuchen oder Memoryeffekte modellierbar
- Zufallszahlenfunktionen müssen genau modelliert werden (setzt entsprechende Ausgangsdaten voraus, dies ist eventuell kritisch bei sehr seltenen Ereignissen mit wenig bekannten Informationen (z.B. Rissbildung in Kernreaktoren durch die Strahlung über lange Zeiträume mit starken Abweichungen vom bekannten Verhalten)

Fazit :

- wenn anwendbar, dann sehr effizientes und schnell einsetzbare Methode

Literatur

[Banks99] Banks, Jerry : Handbook of Simulation – Principles, Methodology, Advances, Application & Practice. New York John Wiley Inc. 1999

[Liebl95] Liebl, Franz: Simulation: Problemorientierte Einführung. 2. überarb. Auflage. R. Oldenbourg Verlag München; Wien Oldenbourg, 1995

[Casella04] George Casella G., Robert C.: Monte Carlo Statistical Methods, Springer Verlag USA; 2. Auflage 2004.

Online-Quellen :

Online-Skript mit Beispielen zur MC-Anwendung in der Physik und Finanzwirtschaft
http://itp.tugraz.at/MML/MonteCarlo/

Diskussion