Vorlesungsreihe Diskrete Simulation (Masterkurs)

Modellierung von Zufallsgrößen bei Simulationsuntersuchungen

Prof. Dr.-Ing. Thomas Wiedemann
email: wiedem@informatik.htw-dresden.de

HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND WIRTSCHAFT DRESDEN (FH)
Fachbereich Informatik/Mathematik

Übersicht zur Modellierung zufälliger Prozesse

- **Simulation von Zufall**
  - Was ist Zufall ?
  - Zufällige Prozesse
  - Nachbildung von Zufall mit dem Rechner
  - Test von Zufallszahlenverteilungen
  - Generierung verschiedener Zufallszahlenverteilungen
- **Anwendung von Zufallszahlen bei der Monte-Carlo-Simulation**

Was ist Zufall ?

Mögliche Interpretationen

- Unbestimmtheit
- Chaos
- nicht genau vorhersagbar

Ursachen für zufällige (stochastische) Größen

- echt zufällige Prozesse auf atomarer Ebene (Heisenbergsches Unschärfetheorem, Brownsche Bewegung)
- Überlagerung einer großen Anzahl prinzipiell determinierter Vorgänge (Lauf einer Roulettekugel)
- durch menschliche Einwirkung subjektiv beeinflusste Entscheidungen und Vorgehensweisen (als Resultat der beiden ersten Ursachen ?)

Zufällige Größen in betrieblichen und ökonomischen Systemen

- Zufällig schwankende oder nicht genaue Prozessparameter
  - führen zu zufälligen Schwankungen der resultierenden Produktparameter
  - und zufälligen Prozesszeiten.
- Ausfall von Maschinen und Produkten durch Materialalterung (meist physikalisch bedingt, teilweise auch beeinflussbar durch unterschiedliches Wartungsverhalten)
- Qualitätsänderungen durch chemische Prozesse
  - Diffusion oder Migration von Stoffen
  - Reifeprozesse
- Marktverhalten einer großen Anzahl von Menschen
  - Angebot- und Nachfrageverhalten unter Einfluss von Wetter, Region und persönlichen Vorlieben
  - Tageskurse der Börsen
  - Energiekonsum

Untersuchung von zufälligen Prozessen

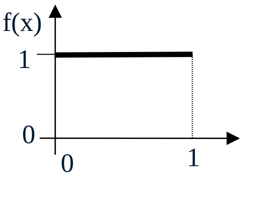
- Die Wahrscheinlichkeitslehre (Stochastik) untersucht das Verhalten zufälliger Größen und liefert analytische Zusammenhänge:
  - Meist für eine große Anzahl von zufälligen Ereignissen
  - Der Einzelfall bleibt nicht genau voraussagbar.

- Die Statistik untersucht konkrete zufällige Prozesse und liefert auf der Basis der Stochastik Kenngrößen und Schätzungen für den Verlauf zufälliger Größen (siehe Arbeitsblatt "Verteilungen" und mathematische Nachschlagewerke)

Beschreibung zufälliger Prozesse

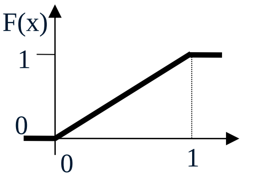
- Ereignisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit treten relativ häufig auf und dienen auch in der Simulationstechnik als Basis für alle weiteren Zufallsgrößen.
- Am Beispiel der mathematischen Gleichverteilung sollen die wichtigsten Kenngrößen beschrieben werden.
- Die **Dichtefunktion f(x)** charakterisiert die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Zufallsgröße x.
- Für die Gleichverteilung im Intervall [0,1] gilt

$$f(x) = \{ \; 1 \text{ für } x \in [0,1] \, , \quad \text{sonst } 0 \; \}$$



- Die **Verteilungsfunktion F(x)** ist definiert als das Integral der Dichtefunktion über X und gibt die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Werten kleiner x an.

$$F(x)=P(X<x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

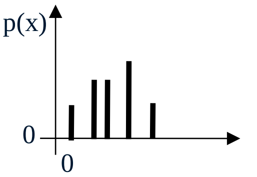


- Für die Gleichverteilung ergibt sich :

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x < 0 \\ x \text{ für } 0 < x < 1 \\ 1 \text{ für } x > 1 \end{cases}$$

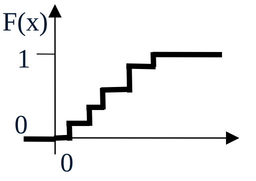
Diskrete zufällige Prozesse

- Neben stetigen Zufallsverteilungen existieren auch diskrete Verteilungen.
- Es treten dabei nur endlich viele, unterscheidbare Zustände auf.
- Die Beschreibung erfolgt analog zu den stetigen Verteilungen.
- $P(x_i)$ gibt die Wahrscheinlichkeit des Auftretens des Wertes x_i an.
- Die Menge aller $P(x_i)$ entspricht der Dichtefunktion.



- Die **Verteilungsfunktion F(x)** einer diskreten Verteilung ist definiert als die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten.

$$F(x_0) = \sum_{x_i <= x_0} P(x_i)$$



- Als grafische Darstellung ergibt sich eine Treppenfunktion .

Häufige Zufallsverteilungen in der Praxis

- zur grafischen Darstellung und Parametern siehe Arbeitsblatt "Verteilungen" und/oder mathematische Nachschlagewerke

Normalverteilung

- Sehr viele Größen in Natur, Technik und Ökonomie
- Schwankungen von Qualitätsparametern und vorgegebenen Bearbeitungszeiten

Exponentialverteilung

- Ankunftsintervall von Personen oder Fahrzeugen an Bedienstationen
- Lebensdauer von Teilen ohne wesentliche Alterungsprozesse (gedächtnislos,d.h. bisherige Lebensdauer hat keinen Einfluß auf zukünftige Lebensdauer)

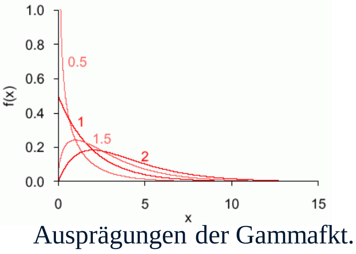
Gammaverteilung

- allgemeinere Form exponentieller Verteilungen (Exponentialverteilung ist eine Sonderform der Gammaverteilung)

Erlang-Verteilung

- Sonderfall der Gammaverteilung (z.B. kumulative Wartezeiten in Servicestationen)

Weibull-Verteilung für genauere Abbildung von Ausfallverhalten



Ausprägungen der Gammafkt.

Generierung von gleichverteilten Zufallszahlen

- Wie nachfolgend gezeigt wird, können fast alle Verteilungsfunktionen von einer Gleichverteilung abgeleitet werden.
- Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen ist die Basis für alle anderen Zufallszahlen

Mögliche Verfahren :

- bei wenigen benötigten Zahlen manuelle Ermittlung per Würfel oder per Zufallszahlentabelle (ältere Literaturstellen)
- technik-basierte Erzeugung durch zufällige technische Kenngrößen (Lottorad) oder Prozesse (radioaktiver Zerfallsprozeß)
- rechentechnische Erzeugung per Softwarealgorithmen.
  - Problem: Da die heutige Rechentechnik auf rein deterministischen Zusammenhängen beruht, ist die Erzeugung wirklich zufälliger Zahlenfolgen nicht trivial.

Definition Pseudozufallszahlen

Aufgrund der vollständigen Determiniertheit von gegenwärtigen EDV-Anlagen können keine echten Zufallszahlen erzeugt werden:

Es wird eine Folge von sogenannte Pseudozufallszahlen ermittelt. Diese Zufallszahlen sind infolge zugrundeliegender deterministischer Algorithmen *nicht zufällig*.
Versucht man dies jedoch mit statistischen Methoden nachzuweisen, so wird dies nicht gelingen. Im Rahmen des Geltungsbereiches der Testverfahren können Pseudozufallszahlenfolgen als Zufallsfolgen genutzt werden.

Algorithmen zur Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen

Der erste und einfachste Algorithmus zur Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen war die **Quadratmittelmethode.**

- Anwendung auf den ersten IBM-Großrechnern

Bildungsvorschrift:

Eine Zahl mit N Ziffern wird quadriert und aus der Mitte des Ergebnisse werden N Ziffern herausgeschnitten und als neue Zufallszahl definiert. Jede weitere Zufallszahl wird analog ermittelt.

Nachteil dieser Methode:

- Entartung der Zufallszahlen bei Auftreten spezieller Ziffernfolge
- Beispiel: Zahl mit N Nullen als Ausgangszahl.
- Da sich Entartungen nicht vorhersagen lassen, findet dieser Algorithmus ***keine Anwendung*** mehr.

Die Kongruenzmethode

Die bessere Kongruenzmethode beruht auf folgender Berechnungsvorschrift:

$$x_{i+1} = a * x_i \bmod m$$

mit x_{i+1} - i+1. Zufallszahl und x_i - i. Zufallszahl (Ausgangsbasis)

m - Modulo-Koeffizient mit $m = 2^r$ bei r = 40 bis 50.

a - Multiplikationskoeffizient (ungerade bei geraden m !)

Mod() – Rest der Ganzzahldivision

Anmerkungen

- Erwägungen statistischer Art legen einen Wert a in der Größenordnung von $\sqrt{m}$ nahe
- m als Zweierpotenz bringt deutliche Geschwindigkeitsvorteile (keine echte Division notwendig, nur Verschiebeoperationen)
- Die rein multiplikativen Berechnungen könnten auch zu Entartungen führen (siehe verbesserte Kongruenzmethode auf Folgeseite !)

Die modifizierte Kongruenzmethode nach Greenberger

Die verbesserte Kongruenzmethode nach Greenberger beruht auf folgender Berechnungsvorschrift:

$$x_{i+1} = (a * x_i + b) \bmod m$$

mit x_{i+1} - i+1. Zufallszahl und x_i - i. Zufallszahl (Ausgangsbasis)

m - Modulo-Koeffizient mit $m = 2^r$ bei r = 40 bis 50.

a - Multiplikationskoeffizient (ungerade bei geraden m !)

b - zusätzlicher Summand (ungerade !)

- Durch den Koeffizienten b ist die Gefahr von Entartungen deutlich geringer.
- Die Kongruenzmethode nach Greenberger wird in den meisten Programmiersprachen zur Generierung von Zufallszahlen eingesetzt.

Bereitstellung der Gleichverteilung [0,1]

- Alle betrachteten Berechnungsformeln liefern Pseudozufallszahlen im Bereich 0 bis m-1 .
- Zur Generierung gleichverteilter Zufallszahlen im Intervall [0,1] muß die ermittelte Zahl letztlich noch durch m dividiert werden.

X im Intervall [0,1] = $(x_i + 1) / m$

- Mit m als Zweierpotenz können die Modulooperationen und die zuletzt besprochene Division sehr günstig durch Verschieboperationen im Prozessor realisiert werden. Generierungsraten von 100.000 bis Millionen Zufallszahlen / s sind so mit moderner Rechentechnik erreichbar.
- Alle modernen Programmiersprachen und Compiler verfügen meist über entsprechende Funktionen zur Generierung gleichverteilter Zufallszahlen. Typische Namen sind rand(), rnd(), random.
- In C / C++ (und analog in Java) sind folgenden Funktionen verfügbar
  - int **rand**(void); liefert eine Zufallszahl
  - void **srand**(unsigned int seed); setzt den Startwert x_0 neu

Anforderungen an Zufallszahlen

Unabhängigkeit

- Zufallszahlen müssen prinzipiell voneinander unabhängig sein. Auch die Elemente jeder Teilfolge müssen voneinander unabhängig sein.

Gleichverteilung

- Die empirische Verteilung der Pseudozufallszahlen muß über dem Intervall [0,1] weitestgehend konstant sein. Es darf keine Häufung an bestimmten Stellung auftreten, welche sich in einer überhöhten Dichtefunktion äußern würde.

Besetzungsdichte

- Ergänzend zur Gleichverteilung müssen die Zufallszahlen auf dem Zahlenstrahl möglichst dicht liegen. Bei der Kongruenzmethode werden aber nur Zahlen im Bereich von 0-m generiert, wodurch die Besetzungsdichte der Gleichverteilung im Intervall [0,1] Lücken in der Größenordnung von mindestens 1/m aufweist.

Anforderungen an Zufallszahlen I I

Effizienz

- Vor allen in der Vergangenheit spielte die Frage der Generierungsgeschwindigkeit und Speicherplatzeffizienz eine Rolle.

Reproduzierbarkeit

- Zu Testzwecken ist es günstig, wenn die Pseudozufallszahlfolgen reproduzierbar sind. Der Effekt von Änderungen am Computer modell bzw. -programm kann so genau festgestellt werden, obwohl zufällige Ereignisse simuliert werden.
- Für die richtige Simulationsuntersuchungen müssen dagegen verschiedene Ausprägungen von Zufallszahlenfolgen möglich sein In den meisten Simulatoren wird diese Anforderung durch die Vorgabe des Startwertes $\mathbf{x_0}$ des Zufallszahlengenerators erreicht.

Methoden zum Test von Zufallszahlengeneratoren

Bei selbstimplementierten Zufallszahlengeneratoren oder solchen unbekannter Qualität müssen diese getestet werden. In Anlehnung an die Anforderungen haben sich einige Testverfahren bewährt.

a.) Der Runs-Test

Im Runs-Test werden die Vorzeichen der Differenz zweier benachbarter Zufallszahlen betrachtet und die Bereiche mit gleichem Vorzeichen als Run bezeichnet.

Beispiel :

Zufallszahlen 0.2 0.7 0.1 0.4 0.5 0.8. 0.6 0.9 0.3 0.2 0.5 0.7

Vorzeichen der Diff. : - + - - - + - + + - -

Länge des Runs 1 1 3 1 1 2 2

Als Bewertungsmaßstab wird angenommen, daß es weder lange Folgen mit einheitlichen Vorzeichen noch mit ständig wechselndem Vorzeichen geben darf. Es werden daher die Längen der Run oder die Anzahl der Runs statistisch mit Prüfverteilungen bewertet (siehe [Liebl95] u.a.).

Zufallszahlen: Test auf serielle Autokorrelation

b.) Test auf serielle Autokorrelation

- Während der Runs-Test sehr oberflächlich arbeitet, kann mit dem Test auf serielle Autokorrelation eine lineare (und aber leider auch nur diese) Abhängigkeit zwischen den Zufallszahlen entdeckt werden.
- Die serielle Autokorrelation beruht im Gegensatz zum Test zweier Größen (X_i , Y_i) auf der Gegenüberstellung von Paaren (X_i , X_{i+k}) einer Merkmalsgruppe.
- Da für gleichverteilte Zufallszahlen im Intervall der Erwartungswert $E(X_i) = ½$ und die Varianz $V(X_i) = 1/12$ gilt, kann die Schätzung der seriellen Autokovarianz mit

$$\mathrm{Cov}\,(X_i\,,\,X_{i+k}) = \frac{1}{(n-k)} \sum_{i=1}^{n-k} [(X_i - 0{,}5)\,(X_{i+k} - 0{,}5)]$$

  berechnet werden.
- Für alle k, dies entspricht einem Versatz innerhalb der gesamten Folge, muß die serielle Autokovarianz gegen Null streben. Ein Auftreten von Werten deutlich ungleich Null läßt auf eine Abhängigkeit innerhalb der Folge schließen und führt zur Ablehnung des Zufallszahlengenerators.

Anpassungstests von Zufallszahlen

Im Gegensatz zu den ersten Tests auf Gleichverteilung können die folgenden Verfahren auch zum Test auf Vorliegen beliebiger Verteilungen verwendet werden.

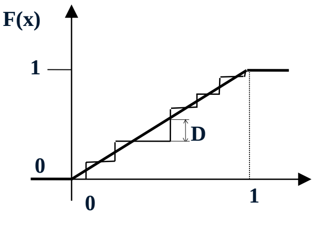
a.) Der χ^2 -Anpassungstest (Chi-Quadrat-Test)

- Im χ^2 -Anpassungstest wird das Histogramm der Stichprobe mit dem Histogramm der theoretischen Verteilung verglichen und die Unterschiede aufsummiert.
- Bei n Zufallszahlen bildet man m Teilbereiche $[a_k, b_k]$ und ermittelt die Anzahl der in jedem Teilbereich enthaltenen h_k Zufallszahlen (m etwa = n / (10 ..100).
- Bei einer Gleichverteilung im Intervall [0,1] müßten in jedem Intervall k theoretisch $e_k = n * [b_k - a_k] = n / m$ Zufallszahlen enthalten sein.
- Die Testgröße $z = \sum_{k=1}^{m} (h_k - e_k)^2 / e_k$ genügt einer χ^2 - Verteilung mit m-1 Freiheitsgraden.
- Anhand der vertafelten χ^2- Verteilung kann festgestellt werden, ob die Testgröße z innerhalb der zulässigen Grenzen liegt. Im obigen Fall muß zur Bestätigung einer Gleichverteilung gelten: $z < \chi^2_{\alpha,m-1}$
- α ist dabei die Irrtumswahrscheinlichkeit -> meist 0,05 oder 0,01

Der Kolmogorov - Anpassungstest

- Beim Kolmogorov -Anpassungstest wird die maximale absolute Abweichung zwischen empirischer und theoretischer Verteilungsfunktion errechnet.
- Bei der Gleichverteilung ergibt sich die maximale Abweichung der sortierten x_i von der theoretischen Verteilung aus

  D= max | (i/n) - x_i | über alle i .



- Der Wert kann als die maximale Abweichung der empirischen Daten von der theoretischen Verteilung interpretiert werden.
- Der Wert $D\sqrt{n}$ wird als testgröße verwendet und unterliegt der sogenannten Kolmogorv-Verteilung.

Erzeugung von Zufallszahlen längerer Periode

- Die häufig verwendete 32 bit-Arithmetik führt maximal zu einer Periode von 2^{31}-1 – was etwa 2 * 10^9 entspricht
- Für größere Experimente mit einigen Millionen Ereignissen kann diese Periode zu kurz sein, falls sehr seltene Ereignisse modelliert werden sollen.

Vorschlag von L'Ecuyer (1988)

- Parallele Verwendung mehrerer Zufallszahlengeneratoren zur Berechung einer Zufallszahl längerer Periode :

$$W_i = \left(\sum_{i=1}^{k} (-1)^{j-1} W_{i,j} \right) \bmod m_1\text{-}1$$

- wobei $W_{i,j}$ die i.-Ziehung des j.-Zufallszahlengenerators ist.
- Als maximale Periode der kombinierten Zufaliszahl W_i ergibt sich

$$P = \frac{(m_1-1)(m_2-1)(m_3-1)(m_4-1)\ldots(m_k-1)}{2^{k-1}}$$

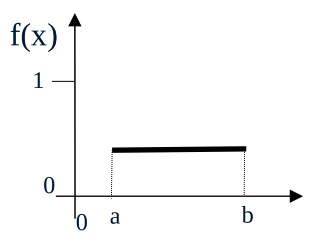
- bereits bei k=2 und m1=2147483568 (m_1<>m_2) ergibt sich als Periode etwa 2*$10^{18.}$
- durch Erhöhung von k läßt sich die Periode leicht anpassen.

Erzeugung von Zufallszahlen mit anderen Verteilungen

- In der Praxis treten neben der Gleichverteilung noch sehr viele anderen Verteilungen auf. Zur Durchführung von Simulationsexperimenten müssen deshalb auch Zufallszahlen mit andern Verteilungen erzeugt werden. Fast immer werden diese Zufallszahlen durch eine Transformation aus gleichverteilten Zufallszahlen des Intervall [0,1] gebildet.

Beliebige Gleichverteilungen

Sehr häufig sind zufällige Größen in einem Intervall [a,b] gleichverteilt.
Zur Erzeugung entsprechender Zufallszahlen reicht es aus,gleich-verteilte Zufallszahlen entsprechend um a zu verschieben und von der Breite 1 (1-0) auf die Breite (b-a) zu spreizen.



Ist x eine gleichverteilte Zufallszahl aus [0,1] so ist
y = a + (b-a) * x
eine gleichverteilte Zufallszahl aus dem Intervall [a,b].

Diskrete Gleichverteilungen

- Diskrete Gleichverteilungen aus dem Intervall [a,b] können analog erzeugt werden, indem nach der Transformation noch eine Rundung auf ganze Zahlen erfolgt.
- Zu beachten ist dabei, das aufgrund der Moduloarithmetik des zugrundeliegenden Zufallsgenerators die rechte Grenze b normalerweise nur sehr selten erreicht wird. Man berechnet deshalb gleichverteilte Zufallszahlen aus dem Intervall [a,b+1] und rundet dann.
- Ist x eine gleichverteilte Zufallszahl aus [0,1) so ist
  - y = int(a + (b-a+1) * x)

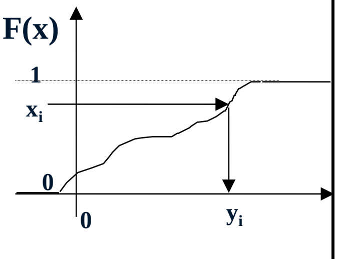
  eine gleichverteilte diskrete Zufallszahl aus dem Intervall [a,b].
- Durch Variationen der Rundungsarithmetik können auch ganzzahlige Zufallszahlen mit Lücken zwischen den einzelnen Ausprägungen erzeugt werden.
- Die Bildungsvorschrift y = 2 * int(a + (b-a+1) * x) ergibt beispielsweise nur gerade Zufallszahlen.

Das Prinzip der Inversion der Verteilungsfunktion

- Erzeugung nichtlinearer Verteilungsfunktionen über die Inversion der Verteilungsfunktion (falls diese explizit existiert):

Jede Verteilungsfunktion ist definiert als Integral der Dichtefunktion und damit monoton steigend. Laut Definition steht der konkrete Zahlenwert F(x) dieses Integrals für die Wahrscheinlichkeit, das ein zufälliger Wert z_i im Intervall $(-\infty, x)$ auftritt. Integriert über den ganzen Wertebereich ergibt sich ein Wert von 1.

Setzt man in die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion F-1(x) eine im Intervall [0,1] gleichverteilte Zufallszahl x_i ein, so ergibt als Ergebnis eine Zufallszahl y_i, welche nach F(x) verteilt ist.
Das Prinzip heißt deshalb auch die Methode der **Inversion der Verteilungsfunktion**.



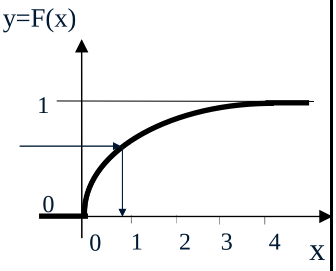
Erzeugung exponentialverteilter Zufallszahlen

- Das Prinzip der Inversion der Verteilungsfunktion soll beispielhaft zur Generierung von exponentialverteilten Zufallszahlen angewendet werden.
- Die Exponentialverteilung ist definiert als:

$$\mathbf{f(y) = \lambda\, e^{-\lambda x} \text{ für } x>0 \text{ , sonst } 0}$$

- Als Verteilungsfunktion ergibt sich

$$\mathbf{F(x) = \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda x} f(t)\, dt = \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}}$$



- Als Umkehrfunktion $F^{-1}(x)$ ergibt sich

$$\mathbf{F^{-1}(y) = \frac{\ln(1-y)}{-\lambda}}$$

- Für die rechentechnische Umsetzung ist noch interessant, das der Ausdruck 1-y mit y als gleichverteilter Zufallszahl im Intervall [0,1] auch durch y ersetzt werden kann, ohne das sich an der Exponentialverteilung etwas ändert. Exponentialverteilte Zufallszahlen ergeben sich damit aus :

$$\mathbf{F^{-1}(y) = \frac{\ln(y)}{-\lambda}}$$

Erzeugung normalverteilter Zufallszahlen

- Die Dichtefunktion der Normalverteilung ist derart komplex, daß mathematisch keine Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion bestimmt werden kann.
- Als Ausweg bietet sich zum einen die Approximation der Umkehrfunktion mit Polynomfunktionen an, welche dann entsprechend berechnet werden kann (siehe Folgeseite).
- Eine zweite Option ist der Zentrale Grenzwertsatz , welcher besagt:

Seien die einzelnen X_i unabhängige und identisch verteilte Variablen mit Erwartungswert μ und endlicher Varianz $V(X_i) = \sigma^2 < \infty$, dann konvergiert die Folge Z_n der standardisierten Summen gegen die Standardnormalverteilung.

- Unter Anwendung des Zentralen Grenzwertsatzes folgt dabei für die Summe von gleichverteilten Zufallszahlen aus [0,1], das die Zufallsgröße z mit

$$\mathbf{z = \frac{1}{\sigma^2\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{m} x_i - m/2}$$

approximativ standardnormalverteilt ist.

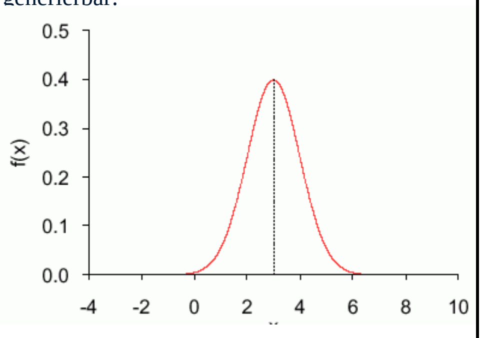
- Der Zentrale Grenzwertsatz wird bei einer Summe von etwa 30 Einzelwerten hinreichend erfüllt (m >= 30). Für praktische Aufgabenstellungen reicht teilweise auch m=12.
- Zu beachten ist, das diese Näherung für die Standardnormalverteilung keine Werte außerhalb von +/- m/2 liefert. Der Anwender muß den dabei entstehenden Fehler selbst abschätzen und gegebenenfalls andere Verfahren einsetzen.

Generierung abgeleiteter Verteilungen

- Durch Ausnutzung mathematischer Umformungen und statistischer Gesetzmäßigkeiten lassen sich weitere Verteilungen ableiten.
- Beliebige Normalverteilung sind durch das Verschieben um den Mittelwert und eine Multiplikation der Standardnormalverteilung generierbar:

$$X \text{ mit } N(\mu, \sigma^2) \; = \; \mu + Z * \sigma^2$$

Bsp. Normalverteilung mit
μ=3 und σ^2=4



- Die Chi-Quadrat-Funktion mit n-Freiheitsgraden läßt sich berechnen aus der Summe der Quadrate von normalverteilten Zufallszahlen nach :

$$C = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Generierung spezieller diskreter Verteilungen

- Eine ganze Reihe von diskreten Verteilungen kann durch Nachbildung des eigentlichen Prozesses gewonnen werden.
- So sind sogenannte "Urnenexperimente" mit dem Ziehen von Objekten aus einem Behälter auf das Generieren gleichverteilter Zufallszahlen zurückführbar:

Binominalverteilung B(n,p)

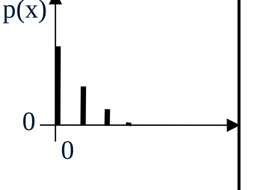
- Man erzeugt n Zufallszahlen und zählt die Anzahl an Werten < p
- p stellt die Wahrscheinlichkeit des gesuchten Falles (Teiles) bei einer Ziehung dar

Hypergeometrische Verteilung H(N,M,n)

- Geht von M gesuchten Objekten bei N Objekten aus
- Ziehung erfolgt ohne Zurücklegen, d.h. es wird jeweils N-1 und bei Erfolg auch M-1 berechnet und bei der nächsten Zeihung verwendet

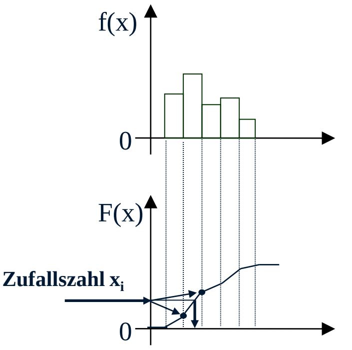
Geometrische Verteilung G(p)

- zählt die notwendige Anzahl an Versuchen bis zu einem Erfolg
- kann als diskretes Gegenstück der Exponentialverteilung gesehen werden



Generierung empirischer Verteilungen

- In der Praxis lassen sich zufällige Prozesse leider nicht immer auf theoretische Verteilungsfunktionen zurückführen. Es verbleibt die Erstellung empirischer Verteilungen.
- Zur Generierung von Zufallszahlen empirischer Verteilungen werden die Häufigkeiten tabellarisch erfaßt, ggf. unter Klassenbildung bei kontinuierlichen Verteilungen.
- Ausgehend vom Histogramm der Häufigkeiten kann dann eine Verteilungsfunktionen mit Linienstücken approximiert werden.
- Bei der Generierung wird das Verfahren der Inversion der Verteilungsfunktion analog verwendet:
  - Zur gezogenen, gleichverteilten Zufallszahl wird das entsprechende Intervall bestimmt.
  - Innerhalb des Intervalls wird dann der genaue Wert durch Interpolation bestimmt.
  - Bei gleichmäßig unterteilten Histogrammen kann die relevante Zeile der Wertetabelle berechnet werden, ansonsten Suche über entsprechende Verfahren.



Literatur

[Banks99] Banks, Jerry : Handbook of Simulation – Principles, Methodology, Advances, Application & Practice. New York John Wiley Inc. 1999

[Liebl95] Liebl, Franz: Simulation: Problemorientierte Einführung. 2. überarb. Auflage. R. Oldenbourg Verlag München; Wien Oldenbourg, 1995

[VDI3633] VDI (Hrsg.): Richtlinie VDI 3633, Blatt 1: Simulation von Logistik- Materialfluß- und Produktionssystemen: Grundlagen. Düsseldorf 1993

Diskussion